Ejercicios Resueltos

Ejercicio 1

La función de transferencia de un sistema de control tiene como expresión:

$$G(s) = \frac{3s^2 + 2s - 1}{s^3 + 2s^2 + 4s - 1}$$

Determinar, aplicando el método de Routh, si el sistema es estable.

Solución.

Para comprobar la estabilidad del sistema debemos partir de la ecuación característica, es decir el polinomio del denominador de la función de transferencia.

$$s^3 + 2s^2 + 4s + 1 = 0$$

El polinomio es completo.
Todos los coeficientes son positivos.
Se confecciona la tabla de Routh.

s^3	1....................	4
s^2	2	1
s^1	2	0
s^0	1	

$$b_1 = \frac{(2)\cdot(4) - (1)\cdot(1)}{2} = 2$$

$$b_2 = \frac{(1)\cdot(0) - (1)\cdot(0)}{1} = 0$$

$$c_1 = \frac{(2)\cdot(1) - (2)\cdot(0)}{2} = 1$$

Y se comprueba que los coeficientes de la primera columna no presentan cambios de signo, por lo que el sistema será estable y los polos de la ecuación característica tendrán su parte real negativa

Ejercicio 2

La función de transferencia de un sistema de control tiene como expresión:

$$G(s) = \frac{2s^3 - 3s + 1}{5s^5 + 4s^4 + 2s^3 + s^2 + 2s + 2}$$

Determinar, aplicando el método de Routh, si el sistema es estable.

Solución.

Para comprobar la estabilidad del sistema debemos partir de la ecuación característica, es decir el polinomio del denominador de la función de transferencia.

$$5s^5 + 4s^4 + 2s^3 + s^2 + 2s + 2 = 0$$

El polinomio es completo.
Todos los coeficientes son positivos.
Se confecciona la tabla de Routh.

s^5	5	2	2			
s^4	4	1	2			
s^3	¾	-2/4		multiplico por 4	→3	-2
s^2	11/3	2		multiplico por 3	→11	6
s^1	-40/11			multiplico por 11	→-40	
s^0	6					

Nota. Al objeto de facilitar los cálculos de los coeficientes de la tabla de Routh, se pueden multiplicar todos los elementos de una fila por un mismo número, ya que esto no modifica los signos, de este modo podemos eliminar los denominadores de los coeficientes y el cálculo de los posteriores coeficientes resulta mucho más cómodo.

Por lo que la tabla de Routh quedaría

s^5	5	2	2
s^4	4	1	2
s^3	3	-2	
s^2	11	6	
s^1	-40		
s^0	6		

Como se puede comprobar, observando los coeficientes de la primera columna de la tabla, en ésta se producen dos cambios de signo, lo que indica que existen dos polos con parte real positiva, y podemos concluir que el sistema resulta inestable.

Ejercicio 3

La función de transferencia de un sistema de control tiene como expresión:

$$G(s) = \frac{s^2 + 4s - 1}{2s^5 + 2s^4 + s^3 + s^2 + 5s + 1}$$

Determinar, aplicando el método de Routh, si el sistema es estable.

Solución.

Para comprobar la estabilidad del sistema debemos partir de la ecuación característica, es decir el polinomio del denominador de la función de transferencia.

$$2s^5 + 2s^4 + s^3 + s^2 + 5s + 1 = 0$$

El polinomio es completo.
Todos los coeficientes son positivos.
Se confecciona la tabla de Routh.

s^5	2	1	5	
s^4	2	1	1	
s^3	0	4		el primer elemento de la fila es cero→no se puede continuar.
s^2				
s^1				
s^0				

En lugar de cero tomamos un infinitésimo que se aproxima a cero por la derecha, es decir sustituimos 0→ε, y continuamos construyendo la tabla de Routh

s^5	2	1 5
s^4	2	1 1
s^3	E	4
s^2	(ε-8)/ ε	1
s^1	4(ε-8)-ε2/(ε-8)	
s^0	1	

Comprobamos el signo del coeficiente de s2:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{(\epsilon - 8)}{\epsilon} = -\infty \Longrightarrow signo(-)$$

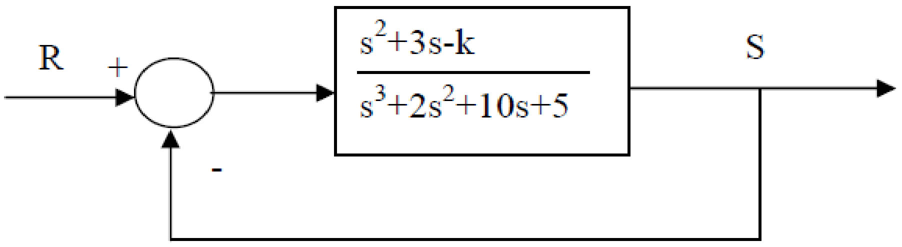
Comprobamos el signo del coeficiente de s1:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{[4(\epsilon - 8) - \epsilon^2]}{(\epsilon - 8)} - \frac{-32}{-4} - 4 \longrightarrow signo(+)$$

Como se puede comprobar, observando los coeficientes de la primera columna de la tabla, en ésta se producen dos cambios de signo, lo que indica que existen dos polos con parte real positiva, y podemos concluir que el sistema resulta inestable

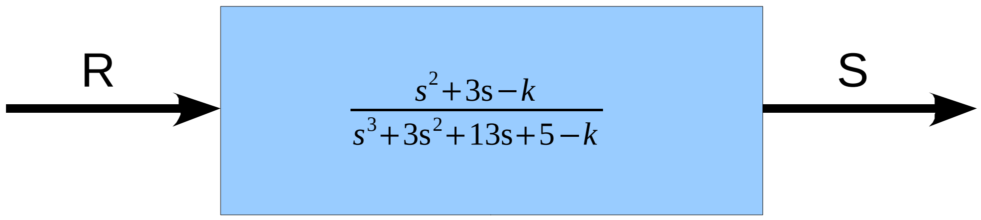
Ejercicio 4

A partir del diagrama de bloques del sistema de transferencia indicado, calcular para que valores de k el sistema es estable.



Solución.

En primer lugar simplificamos el diagrama de bloques, para obtener la función de transferencia total



Y de ella solamente nos interesa la función característica (el polinomio del denominador)

$$s^3 + 3s^2 + 13s + (5 - k) = 0$$

Para que sea estable debe cumplir:
Que el polinomio sea completo, para ello k ≠5.
Que todos los coeficientes sea positivos, para ello debe cumplir (5-k)>0.
Que los elementos de la primera columna de la tabla de Routh sean positivos

s^3	1	13
s^2	3	5 - k
s^1	$\frac{(3)(13) - (1)(5 - k)}{3}$	0
s^0	5 - k	0

a)

$$\frac{(3)(13) - (1)(5 - k)}{3} > 0$$

$$39 - 5 + k > 0$$

$$k > -34$$

b)

$$5 \quad k > 0$$

$$k > \quad 5$$

Por lo tanto se debe cumplir:

$$34 < k < 5$$

Ejercicio 5

A partir del diagrama de bloques del sistema de transferencia indicado, calcular para que valores de C y k el sistema es estable.

$$G(s) = \frac{3s^2 - 2s + 3C}{s^3 + 5s^2 + ks + 3}$$

Solución.

La estabilidad del sistema depende exclusivamente de la ecuación característica, el numerador no afecta para nada, por lo que el valor que tome el parámetro C será indiferente.
Solamente nos centramos el polinomio del denominador que debe cumplir:
Que el polinomio sea completo, lo es en nuestro caso.
Que todos los coeficientes sean positivos, para ello debe ser k>0.
La primera columna de la tabla de Routh no debe tener cambios de signo.
Por lo que construimos a tabla de Routh, y obligamos a que todos los términos de a primera columna sean positivos.

s^3	1	k
s^2	5	3
s^1	$\frac{5k-3}{5}$	0
s^0	3	0

$$\frac{5k-3}{5} > 0$$

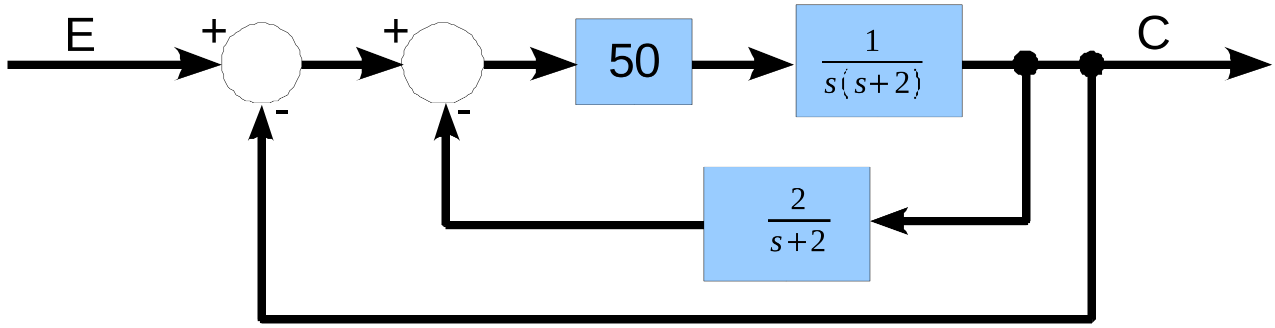
Por lo tanto, para que el sistema sea estable se debe cumplir que:

$$k > \frac{3}{5}$$

Que es una condición más obligatoria que el que k>0.

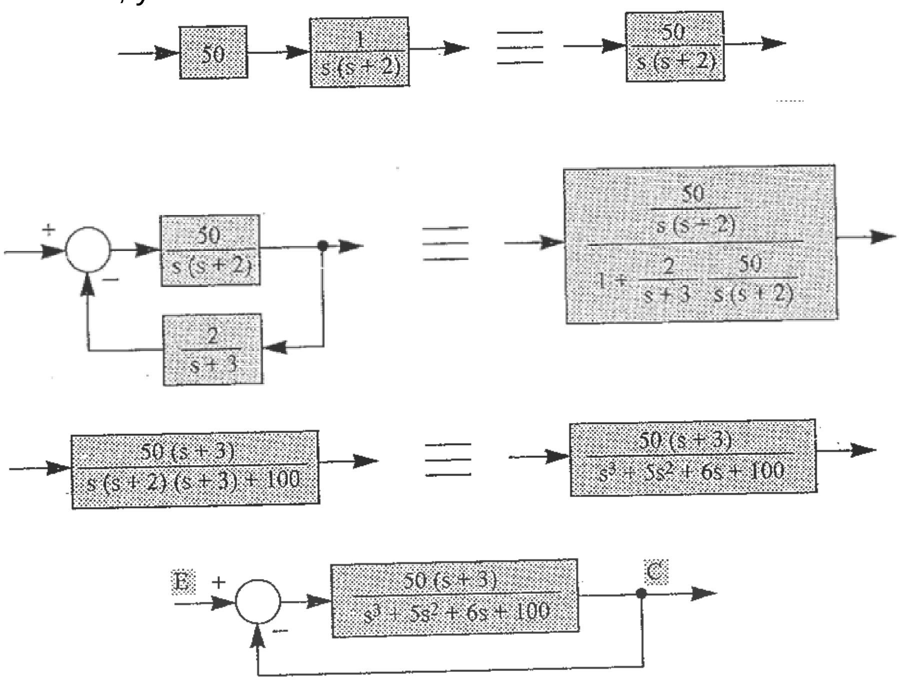
Ejercicio 6

Un sistema de regulación presenta el diagrama de bloques de la figura adjunta, se desea saber si el sistema es estable.



Solución.

En primer lugar debemos simplificar el diagrama de bloques, hasta obtener la función de transferencia total del sistema, una vez obtenida ésta, aplicamos el método de Routh a la función característica, y verificamos si el sistema es estable.



$$M(s)=\frac{\frac{50(s+3)}{s^3+5s^2+6s+100}}{1+\frac{50(s+3)}{s^3+5s^2+6s+100}}=\frac{50(s+3)}{s^3+5s^2+56s+250}$$

Por lo que la función de transferencia total será:

$$G(s)=\frac{50(s+3)}{3^3+5s^2+56s+250}$$

1º) Comprobamos que el polinomio de la función característica es completo.
2º) Comprobamos que no tiene ningún coeficiente negativo.

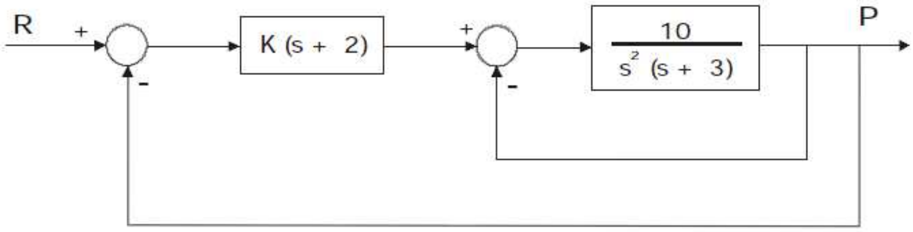
3º) Construimos la tabla de Routh, para ver si hay cambios de signo en la primera columna.

s^3	1	56
s^2	5	250
s^1	$\frac{(5)\,(56) - 250}{5} = 6$	0
s^0	250	0

Dado que cumple todos los requisitos que exige el método de Routh, podemos asegurar que el sistema es estable.

Ejercicio 7

Un sistema de regulación presenta el diagrama de bloques de la figura adjunta, se desea saber para que valores del parámetro k es estable el sistema.



Solución.

En primer lugar obtenemos la unción de transferencia total del sistema, para lo que resolvemos la realimentación unitaria interior. Posteriormente resolvemos la serie de dos bloques. Y concluimos con una nueva realimentación unitaria, con lo que se obtiene como función de transferencia total la expresión:

$$G_T(s) = \frac{P(s)}{R(s)} = \frac{10k(s+2)}{s^3 + 3s^2 + 10ks + (20k+10)}$$

Para saber si el sistema es estable solo debemos tener en cuenta la ecuación característica, es decir el polinomio del denominador de la función de transferencia, y verificar si cumple las condiciones:

1º Polinomio completo.

2º Todos los coeficientes deben ser positivos.

Por lo tanto se debe cumplir:

$$10k > 0 \longrightarrow k > 0$$

$$20k + 10 > 0 \longrightarrow 20k > -10 \longrightarrow k > -\frac{1}{2}$$

A continuación obtenemos la tabla de Routh, que será:

s^3	1....................	10k
s^2	3	20k+10
s^1	10k-10	0
s^0	20k+10	

$$b_1 = \frac{(3)\cdot(10k) - (20k+10)\cdot(1)}{3} = \frac{10k-10}{3}$$

Tomo como valor de b1=10k-10, ya que resulta más cómodo para operar.

$$c_1 = \frac{(20k+10)\cdot(10k-10) - (3)\cdot(0)}{10k-10} = 20k+10$$

Para que el sistema sea estable no deben producirse cambios de signo en la primera columna de la tabla de Routh, por lo que se debe verificar:

$$10k - 10 > 0 \longrightarrow 10k > 10 \longrightarrow k > 1$$

$$20k + 10 > 0 \longrightarrow 20k > -10 \longrightarrow k > -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto al tener que cumplirse todas las inecuaciones el valor más obligatorio es que para k>1 el sistema será estable.

Ejercicio 8

Un sistema de control tiene como función de transferencia total la indicada. Determinar si el sistema es estable.

$$G_T(s) = \frac{s^3 + 2s + 4}{s^5 + s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 2s + 1}$$

Solución.

Para verificar la estabilidad de un sistema de control, aplicaremos el método de Routh, para lo que solamente utilizaremos la ecuación característica, es decir el polinomio del denominador de su función de transferencia, y verificamos:

1º Que el polinomio sea completo.

2º Que todos sus coeficientes sean positivos.

3º Calculamos la tabla de Routh, y verificamos los signos de los coeficientes de la primera columna.

$$\begin{array}{rr|lll}
 & s^5 & 1 & 3 & 2 \\
 & s^4 & 1 & 5 & 1 \\
\text{c.s.}\longrightarrow & & & & \\
 & s^3 & -2 & 1 & 0 \\
\text{c.s.}\longrightarrow & & & & \\
 & s^2 & 11/2 & 1 & 0 \\
 & s^1 & \frac{15}{11} & 0 & 0 \\
 & s^0 & 1 & 0 & 0
\end{array}$$

La primera columna de la tabla de Routh presenta dos cambios de signo por lo que el sistema será inestable y tiene dos raíces con parte real positiva.

Ejercicio 9

Un sistema de control tiene como función de transferencia total la indicada. Determinar si el sistema es estable.

$$G_T(s) = \frac{2s^3 + s^2 + 4}{s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 8s + 5}$$

Solución.

Para verificar la estabilidad de un sistema de control, aplicaremos el método de Routh, para lo que solamente utilizaremos la ecuación característica, es decir el polinomio del denominador de su función de transferencia, y verificamos:

1º Que el polinomio sea completo.

2º Que todos sus coeficientes sean positivos.

3º Calculamos la tabla de Routh, y verificamos los signos de los coeficientes de la primera columna.

S^4	1	4	5
S^3	2	8	
S^2	0	5	

Como aparece un cero en la primera columna, lo sustituimos por un infinitésimo (ε) que tiende a cero por la derecha y continuamos la confección de la tabla.

+	S^4	1	4	5
+	S^3	2	8	
+	S^2	ε	5	
-	S^1	$\frac{-10-8\varepsilon}{\varepsilon}$		
+	S^0	5		

Para ver el signo del coeficiente en s^1, calculamos su límite cuando ε tiende a cero y comprobamos que tiene signo negativo, por lo que el sistema de control será inestable, ya que tiene dos cambios de signo en la primera columna de la taba de Routh, presentando dos raíces con parte real positiva

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{-10-8\varepsilon}{\varepsilon} = -\infty$$

Ejercicio 10

Un sistema de control tiene como función de transferencia total la indicada. Determinar si el sistema es estable.

$$G_T(s) = \frac{s+k}{s^4+s^3+2s^2+2s+3}$$

Solución.

Para verificar la estabilidad de un sistema de control, aplicaremos el método de Routh, para lo que solamente utilizaremos la ecuación característica, es decir el polinomio del denominador de su función de transferencia, y verificamos:

1º Que el polinomio sea completo.
2º Que todos sus coeficientes sean positivos.
3º Calculamos la tabla de Routh, y verificamos los signos de los coeficientes de la primera columna.

S^4	1	2	3
S^3	1	2	
S^2	0	3	

Como aparece un cero en la primera columna, lo sustituimos por un infinitésimo (ε) que tiende a cero por la derecha y continuamos la confección de la tabla.

+	s^4	1	2	3
+	s^3	1	2	
+	s^2	ε	3	
-	s^1	$\frac{-2\varepsilon-3}{\varepsilon}$		
+	s^0	3		

Para ver el signo del coeficiente en s1, calculamos su límite cuando ε tiende a cero y comprobamos que tiene signo negativo, por lo que el sistema de control será inestable, ya que tiene dos cambios de signo en la primera columna de la taba de Routh, presentando dos raíces con parte real positiva.

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{-2\varepsilon - 3}{\varepsilon} = -\infty$$

Ejercicio 11

Un sistema de control tiene como función de transferencia total la indicada. Determinar si el sistema es estable.

$$G_T(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 3s + 2}$$

Solución.

Para verificar la estabilidad de un sistema de control, aplicaremos el método de Routh, para lo que solamente utilizaremos la ecuación característica, es decir el polinomio del denominador de su función de transferencia, y verificamos:

1º Que el polinomio sea completo.
2º Que todos sus coeficientes sean positivos.
3º Calculamos la tabla de Routh, y verificamos los signos de los coeficientes de la primera columna.

S^4	1	3	2
S^3	3	3	
S^2	2	2	
S^1	0	0	

Como aparece una fila de ceros en la primera columna, tomamos la fila anterior:

$$2s^2 + 2s^0$$

La derivamos:

$$4s$$

Y los coeficientes de esta derivada son los que emplearemos en la fila correspondiente al término s1.

s^4	1	3	2
s^3	3	3	
s^2	2	2	
s^1	4	0	
s^0	2		

Como no hay cambios de signo en la primera columna de la tabla de Routh, tras sustituir por los coefiientes de la derivada de la fila anterior, el sistema será estable.

Ejercicio 12

Un sistema de control tiene una función de transferencia cuya ecuación característica es:

$$s^6 + s^5 + 3s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 1 = 0$$

Comprobar si el sistema es estable.

Solución.

Observamos que el polinomio es completo y que todos sus coeficientes son positivos.
Al confeccionar la tabla de Routh, llegamos a una fila en la que todos los coeficientes son ceros.

$$\begin{array}{c|cccc} s^6 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ s^5 & 1 & 2 & 1 \\ s^4 & 1 & 2 & 1 \\ s^3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Por lo tanto, tomamos la fila anterior:

$$s^4 + 2s^2 + 1$$

La derivamos:

$$4s^3 + 4s$$

Y los coeficientes de esta derivada son los que emplearemos en la fila correspondiente al término s^3.
Y continuamos confeccionando la tabla de Routh.

$$\begin{array}{c|cccc} s^6 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ s^5 & 1 & 2 & 1 \\ s^4 & 1 & 2 & 1 \\ s^3 & 4 & 4 \\ s^2 & 1 & 1 \\ s^1 & 0 \end{array}$$

De nuevo aparece una fila de ceros, repetimos el procedimiento anterior y obtenemos la ecuación en s^2

$$s^2 \mid 2$$

Cuya derivada es:

$$2s$$

Y de nuevo utilizamos el coeficiente de esta derivada como coeficientes de la fila en s^1, por lo que a tabla quedará:

$$\begin{array}{c|cccc} s^6 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ s^5 & 1 & 2 & 1 \\ s^4 & 1 & 2 & 1 \\ s^3 & 4 & 4 \\ s^2 & 1 & 1 \\ s^1 & 2 \\ s^0 & 1 \end{array}$$

Como la primera fila columna de la tabla de Routh no presenta ningún cambio de signo, podemos concluir que el sistema es estable y que todas las raíces tienen parte real negativa.

Ejercicio 13

Un sistema de control tiene como función de transferencia total la indicada. Determinar si el sistema es estable.

$$G_T(s) = \frac{2s^3 + 2s + 1}{s^4 + 5s^3 + 3s^2 + s + 2}$$

Solución.

Para verificar la estabilidad de un sistema de control, aplicaremos el método de Routh, para lo que solamente utilizaremos la ecuación característica, es decir el polinomio del denominador de su función de transferencia, y verificamos:
1º Que el polinomio sea completo.
2º Que todos sus coeficientes sean positivos.
3º Calculamos la tabla de Routh, y verificamos los signos de los coeficientes de la primera columna.

+	S^4	1	3	2
+	S^3	5	1	0
+	S^2	14	10	0
-	S^1	-36	0	0
+	S^0	10	0	0

Como la primera columna de la tabla de Routh presenta dos cambios de signo el polinomio tendrá dos raíces con parte real positiva y el sistema de control será inestable.

Ejercicio 14

Un sistema de control tiene como función de transferencia total la indicada. Determinar para que valores de k el sistema es estable.

$$G_{(s)} = \frac{s + 2k}{s^3 + 8s^2 + 17s + (10 + k)}$$

Solución.

Para que el sistema de control sea estable se tiene que cumpli que el polinomio de la ecuación característica sea completo y todos sus coeficientes deben ser positivos, lo que obliga a:

$$10 + k > 0$$

La tabla de Routh será:

S^3	1	17
S^2	8	10+k
S^1	63-2k	0
S^0	10+k	0

Por lo que para que el sistema sea estable todos los coeficientes de la primera columna de la tabla de Routh deben ser positivos es decir.

$$63 - 2k > 0$$

Y

$$10 + k > 0$$

Por lo las condiciones para que el sistema sea estable, se debe cumplir que:

$$-10 > k > 126$$